

جامعة الفيوم
كلية التربية
الفرقة الرابعة (رياضيات أساسي قديم)
المادة : جبر
الزمن : ثلاثة ساعات
الفصل الدراسي الثاني 18/6/2011

السؤال الأول (40 درجة)

(1) عرف : العملية الثنائية على مجموعة - البناء الجبري - شبة الزمرة - الزمرة الدائرية - دليل الزمرة الجزئية في زمرة - مركز الزمرة - قوى العنصر في الزمرة - رتبة العنصر في الزمرة - ضرب زمرتين جزئيتين - زمرة القسمة ، ثم أثبت نظرية لاجرنج

(2) أوجد
(1) $3^{-3} \in \mathbb{Z}_6$ (2) $3^{-3} \in \mathbb{Z}_5^*$ (3) $|5^2| \in \mathbb{Z}_8$
(4) $\langle 2 \rangle \in \mathbb{Z}_6$ (5) $\mathbb{Z}_4/H = \{0,2\}$ (6) $(23)^{-2} \in S_3$

(3) أذكر الخواص الأساسية للزمرة ، ثم أثبت أن النظام الجبري (\mathbb{Z}, \square) يكون زمرة أبدالية ، حيث $1 - x \square y = x + y$ ، وبين لماذا النظام الجبري \mathbb{Z}_6^* ليس زمرة
(4) أذكر : النظرية الأولى للهومو الزمري - نظرية كيلي ، ثم أثبت أن الراسم $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot), f(x) = 3^x$ هو هو زمري ، وأوجد $\text{Ker}(f)$

السؤال الثاني (20 درجة)

(1) أذكر اثنتين من خواص : (الهومو الزمري - المجموعات المصاحبة اليميني - رتبة العنصر) ثم أثبت أنه إذا كانت G زمرة و $H \leq G$ فإن $Hx = xH, \forall x \in G$ $H \triangleleft G \Leftrightarrow xH = Hx, \forall x \in G$
(2) أثبت أن أي زمرة دائرية تكون أبدالية ، ثم بين لماذا \mathbb{Z}_8 زمرة دائرية وأوجد مولداتها
(3) أثبت أنه إذا كانت G زمرة و $\emptyset \neq H \subseteq G$ فإن $H \leq G \Leftrightarrow ab^{-1} \in H, \forall a, b \in H$ ، ثم بين لماذا $H = \{0,3\} \leq \mathbb{Z}_6$ ولكن $K = \{1,5\} \not\leq \mathbb{Z}_6$

السؤال الثالث (40 درجة)

(1) عرف : الحلقة - الحقل - حلقة القسمة - حلقة بول - الهومو الحلقي ، ثم أذكر اثنتين من الخواص الأساسية للحلقات ، مع أثبات واحد منها
(2) أوجد

(1) $3^{-2} + 4^{-1} \in \mathbb{Z}_7$ (2) $\text{ZD}(\mathbb{Z}_{10})$ (3) $U(\mathbb{Z}_6)$
(4) $[(1,2)]^{-3} - [(2,5)] \in \mathbb{Q}_Z$ (5) $\text{Char}(\mathbb{Z}_5)$

(3) أذكر نظرية القسمة الخوارزمية ، ثم أثبت أن $x = 2$ جذر لكثيرة الحدود $f(x) = x^3 - 12x + 16$ ، وأوجد باقي الجذور
(4) أثبت أن مميز أي مجال صحيح S إما أن يساوي الصفر أو عدد أولي ، ثم بين لماذا \mathbb{Z}_{10} ليس مجال صحيح

(5) إذا كان $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ ، فأوجد $A = \{0,3\}, B = \{0,2,4\}$
(6) أذكر النظرية الأساسية في الجبر ، ثم أوجد جذور كثيرة الحدود $g(x) = x^3 - x \in \mathbb{Z}_3[x]$
(7) أثبت أن $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ و أن $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ ولكن $\mathbb{Z} \not\leq \mathbb{Q}$

بالتوفيق

