جامعة الفيوم
Fayoum university
Mathematics Department
كليـــــــــة العلـــوم
قســـــم الرياضيـــات

التمثيل المستحث والمرافق المستحث للجبر المرافق لزمر هوبف

مقدمة من

محمود محمد الصوفي على

للحصول على درجة

دكتور الفلسفة في العلوم - الرياضيات البحتة

(الجبر)

قســـم الرياضيات

كليـــــــــة العلوم

جامعـــــــة الفيوم

٢٠٠٧

التمثيل المستحث والمرافق المستحث للجبر المرافق لزمر هوبف

مقدمة من

محمود محمد الصوفي على

(بكالوريوس علوم وتربية ١٩٩١ ،بكالوريوس علوم ١٩٩٦ ، ماجستير ٢٠٠٠)

للحصول على درجة

دكتور الفلسفة في العلوم ـ الرياضيات البحتة

(الجبر)

وقد تم تمت المناقشة والموافقة عليها

اللجنة

أ. د. / كمال أحمد ديب

أستاذ الرياضيات والمشرف على كلية الحاسبات والمعلومات جامعة الفيوم

التوقيع

أ. د. / أحمد صادق حجازى

أستاذ الرياضيات البحتة بكلية العلوم جامعة المنصورة

التوقيع

د. / فاطمة محمد إسماعيل

مدرس الرياضيات البحتة بكلية العلوم جامعة القاهرة

التوقيع

تاريخ الموافقة / / ٢٠٠٧

موجز الرسالة

في هذه الرسالة، نُعرّفُ خطوات التمثيل المستحثّ والمرافق المستحث للجبر المرافق لزمر هوبف. هذا الخطوات مُعطاة مِنْ وجهتي نظر، الأولى بزمر coisotropic الجزئية الكمّية والجبر المرافق الجزئي لزمر هوبف والآخر مُعطى مِنْ الجبر المرافق لزمر هوبف الجزئية. إنّ الإدراكَ الهندسيَ لمثل هذه للتمثيلات المستحثّ ةِ تم توضَّيحُه ببِ ناء مثال لتمثيل مستحثٌّ للجبر المرافق لزمر هوبف المحدّدة، نظرية التبسيط للتمثيل المستحثٌّ تمت دراستها.

الملخص العربي

إنّ نظريـة التمثيل إحدى التراكيـبِ الجبريـةِ الأساسيةِ في نظريـةِ الجبر. هـي تَلعبُ دوراً مهمـاً فـي الفيزيـاءِ النظريـةِ والرياضـيات الفيزيائيـةِ بجانـب أهميتِهـا الجبريـةِ، نُقتـرح [٤، ١١، ١٣] للتفاصيل.

التمثيل المستحثّ يكون الأداةُ الأساسيةُ في نظريـةِ التمثيل؛ كُلّ تمثيل لبنـاء جبري يُعرّفُ تمثيلَ لبناء جبري جزئي، بالتقييدِ، ذلك الأمر واضحُ. ولكن، التمثيل لبنـاء جبري جزئي من بنـاء جبري يُعرّفُ تمثيل للبناء الجبري الكلى، هذه المعالجُة مسمّاة الحثّ.

بَدأتْ نظريةُ الزمر الكمّيـةِ تطويرها في غضون ١٩٨٢-١٩٨٥. لقد مرّت ٢٠ سنة الآن مُنْذُ عام ١٩٨٦ عندما قدم درينفيلد مفهوم الزمر الكمية (عرّفُ الزمر الكمّيـةَ كجبر هوبف شبه المثاثية) الذي أشعل نشاطِ البحثِ في هذه المنطقةِ والأشياءِ المتعلقة بها. وهو يُرتَبطُ بأجزاء كثيرة أخرى مِنْ الرياضياتِ، قديمة وجديدة. العديد مِنْ المُؤلفين بَدأوا بدِراسَة الخواص الجبريـةِ للزمر الكمّيةِ على سبيل المثال [١٥، ١٦].

إنّ التمثيل المستحث للزمر الكمّيةِ قُدِّمَ مِن قِبل [٥ ، ٨ ، ١٠ ،١٢،١٧]أغلب هذه النَتائِجِ :

- في ١٩٩٢، A. Gonzalez-Ruiz and L. A. Ibort [١٠] ،أعطـىَ إطـاراً لحثّ تمثيل الزمرالكمّيـ ة.

بفرض أن (B, σ) زمرة جزئية كمية من زمرة كمية H. إذا كان (V, ρ) مرافق معياري يساري على B فان $(Ind_R(\theta), \Delta\otimes I)$ يكون مرافق معياري يساري على H حيث

$$Ind_R(\theta) = \{F \in H\otimes V : (R\otimes I)F = (I\otimes\rho)F\}$$

- في ١٩٩٨، Nicola Ciccoli [٨]، دَرسَ العلاقـةَ بـين التمثيـل المسـتحثّ مِـنْ الزمر الجزئية coisotropic الكمّية والفراغ المتجانسَ المتضمن الكمّي.

بفرض أن H جبر هوبف، (C, σ) زمرة جزئية كمية coisotropic يسـارية من H. اذا كـان (V, θ) مرافق معيـاري يسـاري علـى C فـان $(Ind(\theta), \Delta\otimes I)$ يكون مرافق معيـاري يساري على H حيث

$$.Ind(\theta) = \{F \in H\otimes V : (R\otimes I)F = (I\otimes\theta)F\}$$

وإذا كان (C,σ) له قطاع φ فان

١. $H \cong (B^C\otimes C)$ كفراغ اتجاهي

٢. $Ind(\theta) \cong (B^C \otimes V)$ كمعياري يساري على B^C حيث

$$B^C = \{h \in H: (I \otimes \sigma)\Delta(h) = h \otimes \sigma(1)\}$$

- في ٢٠٠١، حجازي ، هجواني، فاطمة إسماعيل وإبراهيم [١٢] أثبتَ أن

١. إذا كان H زمرة كمية ، (B, σ) زمرة جزئية كمية من H وكان (V, φ) معياري يساري على B فان

$$V' = \{h \otimes l: R(h) \otimes \varphi(b \otimes l) = h \otimes 1 \otimes \varphi(b \otimes l) \text{ for all } b \in B\}$$

يكون تمثيل هوبف من النوع الأول على H.

٢. إذا كان H جبر هوبف ، B جبر هوبف الجزئي من H ، V مرافق معياري يميني على B فان $V \otimes H \otimes H$ يكون معياري يميني هوبف على H.

٣. إذا كان H جبر هوبف ، B جبر هوبف الجزئي من H. فان

أ- إذا كان B جبر هوبف الجزئي المعزول من H فانه يوجد تشابه فوقى $\sigma: H \to B$ بحيث أن (B, σ) يكون جبر جزئي هوبف على H.

ب- إذا كان (B, σ) جبر جزئي هوبف على H وكان $\sigma = \sigma^2$ فان B تكون جبر هوبف الجزئي المعزول على H.

مؤخراً ، الجبر المرافق لزمر هوبف قَدَّم مِن قِبل تراييف. فيرليزر دَرسَ الخواص الجبريةَ للجبر المرافق لزمر هوبف، أيضاً عمّمَ الخواص الرئيسيةَ لجبر هوبف شبه المثاثية إلى حالة الجبر المرافق لزمر هوبف. زينينه أعطىَ التركيبَ المزا وج للجبر المرافق لزمر هوبف.

إنّ الهدفَ الرئيسيَ في هذه الرسالة هو دراسةُ التمثيلُ المستحثُّ والمرافق المستحث للجبر المرافق لزمر هوبف. نُحدّدُ جهودنا إلى حالةِ البعد المحدودةِ مِنْ الجبر المرافق لزمر هوبف. للوُصُول لهذا الهدفِ نَحتاجُ لتَعريف مفاهيم الجبر المرافق لزمر هوبف الجزئية والجبر المرافق الجزئي لزمر هوبف وكذلك الزمر الجزئية coisotropicمن الزمر الكمية. أيضاً، حيث أن البناء الجبري للجبر المرافق لزمر هوبف بناء جديد، نحن أضفاُ بَعْض التعاريفِ لهذا البناء في الباب الأول للفصل الثاني، وحصلنا على بَعْض النَتائِجِ لحالة المزاوجة للجبر المرافق لزمر هوبف في الباب الأول - الفصل الثالث.

وتتكون هذه الرسالة من أربعة أبواب رئيسية مقسمة على النحو التالي:

<u>الباب الأول:-</u> " الجبر المرافق لزمر هوبف شبه المثاثية"

وقد قسمناه إلى ثلاثة فصول أساسية في الفصل الأول مفاهيم جبر هوبف والزمر الكمية وأهم خصائصهما التي نحتاجها. وفى الفصل الثاني قدمنا مفهوم الجبر المرافق لزمر هوبف شبه المثاثية وأضافنا لها بعض الخصائص والنظريات. وفى الفصل الثالث استعرضنا مفهوم المزاوجة لمفهوم الجبر المرافق لزمر هوبف وأضافنا له بعض الخصائص والنظريات الجديدة.

الباب الثاني :- **"التمثيل المستحث والمرافق المستحثة للجبر المرافق لزمر هوبف"**

وقد قسمنا هذا الباب إلى ثلاث فصول رئيسية تم خلال الفصلين الأول والثاني استعراض طريقة بناء التمثيلات المستحثة والمرافقة المستحثة في حالة الجبر وحالة الزمر الكمية. وفى الفصل الثالث قمنا بدراسة كيفية بناء التمثيلات المستحثة في حالة الجبر المرافق لزمر هوبف.

الباب الثالث :- " الفهم الهندسي للتمثيلات المستحثة للجبر المرافق لزمر هوبف"

في هذا الباب تم دراسة المعنى الهندسي للتمثيلات المستحثة من التمثيلات المعطاة على الجبر المرافق لزمر هوبف الجزئية وكذلك دراسة العلاقة بين التمثيلات المعطاة على الجبر المرافق لزمر هوبف الجزئية والجبر المرافق لزمر هوبف الأصلية.

الباب الرابع :- " التبسيط للتمثيلات المستحثة من الجبر المرافق لزمر هوبف "

في هذا الباب ، دَرسنَا بساطةَ التمثيلات المستحثّةِ للجبر المرافق لزمر هوبف. دعْ H يَكُونُ جبر مرافق π هوبف، $(\sigma، C)$ π-coisotropic گمّية زمرة جزئية. إذا نحن لدينا ْإثنان π-comodules متكافئان على C. ما العلاقاتُ بين التمثيلات المستحثّةِ والتمثيلات المرافقة المستحثة على H؟ أيضاً، عِنْدَنا السؤالُ التاليُ: ما العلاقاتُ الجبريةُ للحثِّ فيما يتعلق بالجمع المباشرةَ مِنْ التمثيلات من وجهةِ نظر البساطةِ. أخيراً، أثبتنَا بأنّ إذا التمثيل المستحثِّ بسيطُ، فان حثّه الجبري مَبْنيُ مِنْ تمثيل بسيطِ مِنْ π-coisotropic گمّية زمرة جزئية. إذا عِنْدَنا تمثيلُبسيطُ مِنْ π-coisotropic گمّية زمرة جزئية لجبرمرافق π هوبف H ، فان التمثيل المستحثّ لَيسَ ضروريَ لِكي يَكُونَ بسيطَ.