كلـــية العلوم
قســـــــم الرياضيات

دراسة تأثير أنواع معينة من الرواسم على الحلقات

رسالة مقدمة من الدارسة

عزيزة جودة أحمد جودة

بكالوريوس علوم قسم الرياضيات٢٠١٣

كلية العلوم- جامعة الفيوم

لاستيفاء متطلبات الحصول على درجة الماجستير

(الرياضيات البحتة- الجبر)

جامعة الفيوم

٢٠١٩

كلـــية العلوم
قســـــم الرياضيات

دراسة تأثير أنواع معينة من الرواسم على الحلقات

رسالة مقدمة من الدارسة

عزيزة جودة أحمد جودة

للحصول على درجة الماجستير

(الرياضيات البحتة – الجبر)

المشرفون

أ. د. كمال أحمد حسن ديب
أستاذ الرياضيات البحتة
قسم الرياضيات
كلية العلوم - جامعة الفيوم
التوقيع.....

أ. د. محمد ناجي ضيف
أستاذ الرياضيات البحتة
قسم الرياضيات
كلية العلوم - جامعة الأزهر
التوقيع.....

د. محمود محمد الصوفي
مدرس الرياضيات البحتة
قسم الرياضيات
كلية العلوم - جامعة الفيوم
التوقيع.....

وكيل الكلية لشئون الدراسات العليا والبحوث

أ. د. محمد سعيد أبو الغار

التوقيع.....

موجز الرسالة

في هذه الرسالة ندرس أنواعًا محددة من الحلقاتكالحلقات الأوَّلية وشبه الأوَّلية المعرَّف عليها بعض أنواع الرواسم، مثل رواسم الاشتقاقيات، والاشتقاقيات المعممة، والضوارب (الممركزات) اليسرى، والاشتقاقيات الهوموموركية وذلك لتحديد الشروط التي تضمن إبدالية الحلقة، ونهتم أيضا بإيجاد مركز الحلقة للحلقات الغير إبدالية.

تحتوي الرسالة على خمسة أبواب، أفردنا الباب الأول لسرد التعريفات والمصطلحات التي نستخدمها في باقي الأبواب.

قسمنا الباب الثاني إلى قسمين: نعرض في القسم الأول النتائج التي سبق الحصول عليها، والمتعلقة برواسم الاشتقاقيات، والاشتقاقيات المعممة، والضوارب (الممركزات) اليسرى، وكذلك الاشتقاقيات الهوموموركية، أما القسم الثاني فهو يضم النظريات والنتائج التي نستعين بها في إثبات نتائجنا.

الباب الثالث يشتمل على ثلاثة أقسام: القسم الأول يتناول حلقات-* أوَّلية (أي حلقات ذات انفليوشان أوَّلية) ذات اشتقاقية، ونقوم بتحسين النتائج الموجودة في [40]، وذلك باستخدام الشروط الموجودة في [40] على فئات جزئية من الحلقة بدلاً من الحلقة ككل والوصول إلى نفس النتائج فمثلاً ثَبَتَ في [40] النتيجة التالية: بفرض R حلقة أوَّلية مميزها لا يساوي ٢، وذات انفليوشان* من النوع الثاني.إذا كانت R تمتلك اشتقاقية d بحيث $d([x, x^*]) \pm [x, x^*]$ ينتمي الى مركز الحلقة Z(R) لكل x في R فإن الحلقة تكون إبدالية. ثم نقوم في هذا القسم على سبيل المثال باثبات النتيجة التالية: بفرض R حلقة أوَّلية ذات انفليوشان* من النوع الثاني مميزها لا يساوي ٢، و I مثالي غير صفري في R. إذا كانت R تمتلك اشتقاقية d بحيث $d([x, x^*]) \pm [x, x^*]$ ينتمي إلى مركز الحلقة لكل x في I فإن الحلقة تكون إبدالية، وفي نهاية هذا القسم نوفر مثالين لإثبات أن هذه النتيجة غير صحيحة في حالة الحلقات شبه الأوَّلية وحالة الانفليوشان من النوع الأول.

أما في القسم الثاني ندرس إبدالية الحلقات-* الأوَّلية ذات الاشتقاقيات المعممة التي تحقق شروطًا جبرية على فئات جزئية من الحلقة (المثاليات) وفيه نثبت مايلي: بفرض R حلقة أوَّلية ذات انفليوشان* من النوع الثاني مميزها لا يساوي ٢، و I مثالي غير صفري في R . فان R تكون إبدالية إذا كانت تمتلك اشتقاقية معممة F مصاحب لها اشتقاقية غير صفرية d

بحيث إنFتحقق أي مما يأتي:

(١) $[F(x), x^*] \in Z(R)$

(٢) $F(x) \circ x^* \in Z(R)$

(٣) $[F(x), F(x^*)] = 0$ for all $x \in I$ and $dF \neq 0$ on I.

بالإضافة إلى إعطاء ثلاثة أمثلة في نهاية القسملتوضيح أن شرط إبدالية الحلقة وشرط الانفليوشان من النوع الثاني وشرط $dF \neq 0$ على I هي شروط ضرورية.

في القسم الثالث من هذا الباب نعمم ونحسن النتائج الموجودة في [4]؛ وذلك بإثبات نفس النتائج باستخدم الشروط فى [4]على مثالي أيمن، وليس على الحلقة كلها، وفي هذا القسم أيضًا نقوم بدراسة إبدالية الحلقات-*الأوَّلية ذات الضوارب اليسرى تحت شروط أخرى مثل: إذا كانتR حلقةأوَّلية ذات انفليوشان* من النوع الثاني، و I مثالي أيمن غير صفري في R؛ فإن R تكون إبدالية إذا كانت تمتلك ضارب يساري F بحيثأي مما يأتي ينتمي إلى مركز الحلقة لكل x في I: $[F(x), F(x^*)]$, $F(x) \circ F(x^*)$, $[F(x), x^*]$, $F(x) \circ x^*$ ونتائج هذا القسم قد تم نشرهافى [24].

الباب الرابع يشتمل على قسمين،وقدخُصِّصَ للوصول إلى نتائج على الحلقات ذات الاشتقاقيات الهوموموروفيةبناءً علىالنتائجفي [١٠]، [١١] مثل: (i) بفرض أنRحلقةأوَّلية وIمثاليغيرصفريمنR. بفرضأنRعُرِّف عليها اشتقاقية معممةFالمصاحب لها اشتقاقيةغيرصفريةdبحيث$d(Z(R)) \neq (0)$. إذاكانت

$$F([x, y]) - [x, y] \in Z(R) \text{ (or } F([x, y]) + [x, y] \in Z(R)) \text{ for all } x, y \in I,$$

فإنRتكون حلقة ابدالية. (ii) بفرض أنRحلقةأوَّلية مميزها لا يساوي ٢،وUمثاليليغيرصفري منR. إذاكانتRتمتلك اشتقاقية dبحيث أن

$$d([u, v]) + [u, v] = 0 \text{ (or } d([u, v]) - [u, v] = 0) \text{ for all } u, v \in U,$$

فإن $U \subseteq Z(R)$، نتناول دراسة إبدالية الحلقات ذات الاشتقاقيات الهوموموروفيةفى القسم الأول من هذا الباب، وذلك في وجود بعض الشروط على مثاليات من الحلقة على سبيل المثال نثبت أنبفرض R حلقةأوَّلية مميزها لا يساوي ٢، وI مثالي غير صفري في R. فإن R تكون إبدالية اذا كانت تمتلك اشتقاقية هوموموروفية hبحيـــــث $h(Z(R)) \neq (0)$ويتحقق أيًا من الشروط الآتية:

(1) $h(x\circ y) - (x\circ y) \in Z(R)$ for all $x, y \in I$or

(2) $h(x\circ y) - [x, y] \in Z(R)$ for all $x, y \in I$.

في القسم الثاني نجاوب على السؤال الآتي: متى يكون مثالي لي جزء من مركز الحلقة المزودة باشتقاقية هومومورفيه؟ ونعطي بعض النتائج الأخرى، ومن النتائج المهمة التى حصلنا عليها:بفرض أن R حلقة شبه أوَّلية مميزها لا يساوي ٢ وU مثالي لي في R . إذا كانتR تمتلك اشتقاقية هومومورفية hبحيث $h([x, y]) = [x,y]$ لكل x, y في Uفان U جزء من مركزالحلقة. ونتائج هذا الباب موجود في المرجع [25]وتم إرسالها للنشر بإذن الله.

فى الباب الخامس نهتم بتحديد مركز الحلقة المعرف عليها أنواع معينة من الرواسم،وذلك بتقديم فئات جزئية محددة من هذه الحلقات مثل:

$$Z_1(S, f) = \{y \in R: [f(x), f(y)] = [f(y), x] + [y, f(x)] \text{ for all } x \in S\};$$

$$Z_0(S, f) = \{y \in R: f([x, y]) = 0 \text{ for all } x \in S\};$$

حيث S فئة جزئية من الحلقة R، وf راسم من الحلقة إلى نفسها. هذه الفئات الجزئية تعرف بـ (center-like subsets). نبحث عن الشروط التى إذا تحققت فإن مركز الحلقة يساوى إحدى هذه الفئات. فى الحقيقة نتائجنا مرتبطة بالنتائج الحديثة الموجودة فى [12] بواسطة بيل وضيف، فقد قام بيل وضيف بوضع ثلاث فئات هم:

$$Z^*(R, f) = \{y \in R: [x, y] = [f(y), f(x)] \text{ for all } x \in R\};$$

$$Z^{**}(R, f) = \{y \in R: [x, y] = [f(x), f(y)] \text{ for all } x \in R\};$$

$$Z_1(R, f) = \{y \in R: [f(x), f(y)] = [f(y), x] + [y, f(x)] \text{ for all } x \in R\}.$$

وأثبتوا في [12] النتائج الآتية:

١- إذا كانت R حلقة شبه أوَّلية ذات اشتقاقية d فان $Z^*(R, d)$ تساوي مركز الحلقة.

٢- إذا كانت R حلقة شبه أوَّلية ذات اشتقاقية d فان $Z^{**}(R, d)$ تساوي مركز الحلقة.

٣- إذا كانت R حلقة أوَّلية مميزها لا يساوي ٢، وذات اشتقاقية غير صفرية d فإن $Z_1(R, d)$ تساوي مركز الحلقة.

٤- إذا كانت R حلقةأوَّلية مميزها لا يساوي ٢، وذات ابيمورفيزم T(epimorphism) بحيث $T \neq id$ فان $Z^{**}(R, T)$ تساوي مركز الحلقة.

٥- إذا كانت R حلقة أوَّلية مميزها لا يساوي ٢، وذات ابيمورفيزم (epimorphism) T بحيث $T^2 \neq id$ فان $Z^{**}(R, T)$ تساوي مركز الحلقة.

في هذا الباب نثبت أنه إذا كانت R حلقة أوَّلية مميزها لا يساوي ٢،I مثالي غير صفري في R و d اشتقاقية غير صفرية علىR فان $Z_1(I, d)$ يساوي مركز الحلقة، ونثبت أيضا أنه اذا كانت R حلقة أوَّلية مميزها لا يساوي ٢،و I مثالي غير صفري فيR فان $Z_0(I, f)$ يساوي مركز الحلقة حيث f اشتقاقية أواشتقاقية معممة أو اشقاقية هوموموفية،علاوة على ذلك نعطي بعض الأمثلة لإثبات أن هذه النتائج لا يمكن أن تمتد لحالة الحلقة شبه الأوَّلية.