الملخص العربى

الهدف من هذه الرسالة تعريف ودراسة خصائص فصول جديدة من الدوال التحليلية (أحادية ومتعددة التكافؤ) المعرفة فى قرص الوحدة المفتوح $\mathbb{U}$ حيث $\mathbb{U}=\{z\in C:|z|<1\}$ فى المستوى المركب $\mathbb{C}$ وهذه الفصول معرفة باستخدام بعض المؤثرات الخطية والتكاملية وحاصل ضرب هادمرد (أوالالتفاف) ومشتقات من الرتب العليا.

ليكن **A** يرمز إلى فصل الدوال التحليلية والتي على الصورة

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k \qquad (1)$$

والمعرفة على $\mathbb{U}$ و S يرمز إلى الفصل الجزئي من **A** والمكون من الدوال التحليلية أحادية التكافؤ فى $\mathbb{U}$ وكذلك يرمز T للفئة الجزئية من S والتى تتكون من الدوال ذات المعاملات السالبة والتي على الصورة $(a_k\geq 0)$ $f(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$.

لتكن الدالتان g و f تنتميان للفصل **A** حيث $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ و $g(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}b_k z^k$ فإن حاصل ضرب هادمرد (أو الالتفاف) للدالتين $f(z)$ و $g(z)$ يعرف كالآتي:

$$(f*g)(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k b_k z^k=(g*f)(z).$$

تعريف 1 [70] :

يقال للدالة $f(z)\in S$ إنها تنتمي لفصل الدوال النجمية من الرتبة α $(0\leq\alpha<1)$ ونرمز له بالرمز $S^*(\alpha)$ ، إذا كانت تحقق الشرط التالي:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha.$$

تعريف 2 [70] :

يقال للدالة $f(z)\in S$ إنها تنتمي لفصل الدوال المحدبة من الرتبة α $(0\leq\alpha<1)$ ونرمز له بالرمز $K(\alpha)$ ، إذا كان تتحقق الشرط التالي:

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,$$

ودرَس الفصلين $S^*(\alpha)$ و $K(\alpha)$ كل من Schild [74] و MacGregor [53] و Jack [38] و Pinchuk [68] وآخرون. ويرتبط الفصلان $S^*(\alpha)$ و $K(\alpha)$ بالعلاقة

$$f(z) \in K(\alpha) \iff zf'(z) \in S^*(\alpha).$$

تعريف 3 [34] :

يقال للدالة $f(z) \in S$ إنها تنتمي لفصل الدوال القريبة من التحدب من الرتبة α $(0 \le \alpha < 1)$ ويرمزلها بالرمز $C_g(\alpha)$ إذا وجدت دالة $g(z) \in S^*$ ويتحقق

$$\Re\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > \alpha, \ z \in \mathbb{U}.$$

وهذا الفصل درس بواسطة (*Goodman [34]*) ونلاحظ أن

$$K(0) \subseteq S^*(0) \subseteq C_g(0) \equiv C_g \subseteq S,$$

حيث C_g هو فصل كل الدوال القريبة من التحدب ودرس هذا الفصل *Kaplan [44]*

نرمز بالرموز $T^*(\alpha)$ و $C(\alpha)$ للفصول الجزئية من $S^*(\alpha)$ و $K(\alpha)$ والتي تحقق

$$T^*(\alpha) = S^*(\alpha) \cap T \text{ and } C(\alpha) = K(\alpha) \cap T.$$

الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تسمى محدبة (نجمية) بانتظام على قرص الوحدة $\mathbb{U}$ إذا كانت محدبة (نجمية) وتحقق أن القوس $f(\gamma)$ يكون محدبا (نجميا) بالنسبة $f(\xi)$ لكل قوس دائرى γ له المركز ξ محتوى أيضا فى $\mathbb{U}$. ويرمز لفصل الدوال المحدبة بانتظام وفصل الدوال النجمية بانتظام , على التوالي بالرموز UCV و UST وهذه الفصول عرفها *Goodman [35]*.

تعريف 4 ([35],[52],[71]) :

يقال إنَ الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي إلى فصل الدوال المحدبة بانتظام UCV إذا وفقط إذا كان :

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \ge \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \quad (z \in \mathbb{U}).$$

وأيضا نقول إنَ الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي إلى فصل الدوال النجمية بانتظام UST إذا وفقط إذا كان:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \geq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| \quad (z\in \mathbb{U}).$$

ودرَس الفصل UCV كل من Goodman [35] و Ma and Minda [52] وأيضا درَس الفصل UST كل من Goodman [36] و Ronning [72].

ويرتبط الفصلين UST و UCV بالعلاقة

$$f(z)\in UCV \Leftrightarrow zf'(z)\in UST. \tag{2}$$

وفى [72] عمم Ronning الفصلين UCV و UST بإدخال البارامتر $\alpha(-1\leq\alpha\leq 1)$ كالآتي:

تعريف 5 [72] :

يقال إن الدالة $f(z)\in$ **A** تنتمي إلى فصل الدوال النجمية بانتظام من الرتبة $\alpha(-1\leq\alpha\leq 1)$ $UST(\alpha)$ إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right\} \geq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| \quad (-1\leq\alpha<1; z\in \mathbb{U}). \tag{3}$$

باستبدال $f(z)$ فى المعادلة (3) بواسطة $zf'(z)$ نحصل على المعادلة الآتية

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\alpha\right\} \geq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \quad (-1\leq\alpha<1; z\in \mathbb{U}),$$

وهذا فصل الدوال المحدبة بانتظام من الرتبة $\alpha(-1\leq\alpha\leq 1)$ ويرمز له بالرمز $UCV(\alpha)$.

$$f(z)\in UCV(\alpha) \Leftrightarrow zf'(z)\in UST(\alpha).$$

في المرجعين [42] و [43] عرفا Kanas و Wisniowska فصول الدوال المحدبة بانتظام من النوع β ويرمز له $\beta-UCV$, $(0\leq\beta<\infty)$ وكذلك فصول الدوال النجمية بانتظام من النوع β ويرمز له $\beta-UST,$ $(0\leq\beta<\infty)$ كالتالي:

تعريف 6 ([42],[43]):

يقال إنَ الدالة $f(z)\in$ **A** تنتمي إلى فصل الدوال المحدبة بانتظام من النوع β ويرمز له بالرمز $\beta-UCV$ إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \beta\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \quad (\beta \geq 0; z \in \mathbb{U}).$$

من (2) نجد أن فصل الدوال النجمية بانتظام من النوع β ($\beta - UST$) يرتبط بفصل الدوال المحدبة بانتظام من النوع β $(\beta - UCV)$ بالعلاقة $f(z) \in \beta - UCV \Leftrightarrow zf'(z) \in \beta - UST$
ولذلك الفصل $\beta - UST$ هو فصل جزئى من **A** ويحقق الشرط الآتي

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \geq \beta\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \quad (\beta \geq 0; z \in \mathbb{U}).$$

تعريف 7 ([76],[62],[10]):

يقال إنَ الدالة **A** $f(z) \in$ تنتمي إلى فصل الدوال النجمية بانتظام من الرتبة α والنوع β $UST(\alpha, \beta)$ $(-1 \leq \alpha < 1, \beta \geq 0)$, إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha\right\} \geq \beta\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \quad (-1 \leq \alpha < 1; \beta \geq 0; z \in \mathbb{U}). \tag{4}$$

تعريف 8 ([62],[10]):

يقال إنَ الدالة **A** $f(z) \in$ تنتمي إلى فصل الدوال المحدبة بانتظام من الرتبة α والنوع β إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \alpha\right\} \geq \beta\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \quad (-1 \leq \alpha < 1; \beta \geq 0; z \in \mathbb{U}). \tag{5}$$

من (4) و (5) نستنتج أن

$$f(z) \in UCV(\alpha, \beta) \Leftrightarrow zf'(z) \in UST(\alpha, \beta).$$

وأيضا نلاحظ أن:

(i) $UST(0,1) = UST$ and $UST(\alpha,1) = UST(\alpha)$,

(ii) $UCV(0,1) = UCV$ and $UCV(\alpha,1) = UCV(\alpha)$.

بفرض أن $\alpha_1,...,\alpha_q$ و $\beta_1,...,\beta_s \ (\beta_j \in \mathrm{C} \setminus \mathrm{Z}_0^-, \mathrm{Z}_0^- = 0,-1,-2,...; j = 1,2,...,s),$ بارامترات مركبة أو حقيقية فإن الدالة الفوق هندسية المعممة ${}_qF_s(\alpha_1,...,\alpha_q,\beta_1,...,\beta_s;z)$ تعرف كالآتي:

$$
{}_qF_s(\alpha_1,...,\alpha_q,\beta_1,...,\beta_s;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k ... (\alpha_q)_k}{(\beta_1)_k \ ... \ (\beta_s)_k} \frac{1}{k!} z^k, \tag{6}
$$

$$
(q \le s+1; s,q \in \mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \{0\}, \mathrm{N} = \{1,2,...\}; z \in \mathbb{U}),
$$

حيث

$$
(\theta)_k = \frac{\Gamma(\theta+k)}{\Gamma(\theta)} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ \theta(\theta+1)....(\theta+k-1) & (k \in \mathrm{N}). \end{cases}
$$

باستخدام الدالة

$$
h(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s;z) = z\,{}_qF_s(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s;z),
$$

Dziok و Srivastava ([29]) عرفا المؤثر الخطي $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$: $H_{q,s}(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s)$ باستخدام حاصل ضرب هادمرد (أو الالتفاف) كالآتي:

$$
\begin{aligned}
H_{q,s}(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s)\, f(z) &= h(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s;z) * f(z) \\
&= z + \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_k(\alpha_1) a_k z^k \ \ (z \in \mathbb{U}),
\end{aligned}
$$

حيث

$$
\Gamma_k(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1)_{k-1} ... (\alpha_q)_{k-1}}{(\beta_1)_{k-1} ... (\beta_s)_{k-1}} \frac{1}{(k-1)!}.
$$

ونختصر هذا المؤثر على الصورة الآتية:

$$
H_{q,s}(\alpha_1)\, f(z) = H_{q,s}(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s;z)\, f(z).
$$

وهذا المؤثر الخطي يتضمن مؤثرات خطية مختلفة والتى درسها العديد من المؤلفين السابقين انظر الي (Carlson and Shaffer [21] و Hohlov [37] و Ruscheweyh [73] و Owa and Srivastava [66] و Choi et al. [28] و Noor [58] و Cho et al. [24] و Bernardi[18] وآخرون).

(Jung et al. [40]) عرفوا مؤثرات تكاملية كالآتي:

$$
Q_\beta^\alpha f(z) = \begin{cases} \binom{\alpha+\beta}{\beta} \frac{\alpha}{z^\beta} \int_0^z \left(1-\frac{t}{z}\right)^{\alpha-1} t^{\beta-1} f(t)\,dt & (\alpha > 0; \beta > -1) \\ f(z) & (\alpha = 0; \beta > -1) \end{cases} \tag{7}
$$

و

$$I^{\alpha} f(z)=\begin{cases} \frac{2^{\alpha}}{z\Gamma(\alpha)}\int_0^z \left(\log \frac{z}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)dt & (\alpha>0) \\ f(z) & (\alpha=0) \end{cases}. \tag{8}$$

لأي دالة $f(z)\in$ **A** نستنتج أن

$$Q_{\beta}^{\alpha} f(z)=z+\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}a_k z^k \quad (\alpha\geq 0;\beta>-1) \tag{9}$$

و

$$I^{\alpha} f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\alpha} a_k z^k \quad (\alpha\geq 0)\,. \tag{10}$$

باستخدام (9) و(10) من السهل أن نتحقق من المعادلتين التكراريتين الآتيتين:

$$z\left(Q_{\beta}^{\alpha+1} f(z)\right)' =(\alpha+\beta+1)Q_{\beta}^{\alpha} f(z)-(\alpha+\beta)Q_{\beta}^{\alpha+1} f(z) \qquad (\alpha>0;\beta>-1),$$

$$z\left(I^{\alpha+1} f(z)\right)' = 2I^{\alpha} f(z)-I^{\alpha+1} f(z) \qquad (\alpha>0).$$

بوضع $\beta=v>-1, \alpha=1$ في المعادلة (7) نلاحظ أن

$$\begin{aligned} Q_v^1 f(z) &= J_v f(z)=\frac{v+1}{z^v}\int_0^z t^{v-1} f(t)dt \\ &= z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{v+1}{v+k}a_k z^k \quad (v>-1; z\in \mathbb{U}), \end{aligned}$$

حيث J_v هو مؤثر ليبرا التكاملي ([28] و[32] و[65]).

لتكن $S(p)$ هى فصل الدوال التحليلية ومتعددة التكافؤ والتي على الصورة

$$f(z)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \quad (p\in \mathrm{N}), \tag{11}$$

و $S(p,n)$ هى فصل الدوال التحليلة ومتعددة التكافؤ والتي على الصورة

$$f(z)=z^p+\sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k \quad (p\in \mathrm{N}),$$

نلاحظ أن $S(1,1)=S$ و $S(p,1)=S(p)$.

لتكن $T(p)$ هى فصل الدوال التحليلية ومتعددة التكافؤ والتي على الصورة

$$f(z)=z^p-\sum_{k=p+1}^{\infty}a_k z^k \ (a_k\geq 0;\, p\in \mathrm{N}), \tag{12}$$

ونلاحظ أن $T(1)=T$.

و $T(p,n)$ هى فصل الدوال التحليلية ومتعددة التكافؤ والتي على الصورة

$$f(z)=z^p-\sum_{k=p+n}^{\infty}a_k z^k \ (a_k\geq 0;\, p\in \mathrm{N}), \tag{13}$$

وأيضا نلاحظ أن $T(p,1)=T(p)$.

لتكن Σ ترمز إلى فصل الدوال الميرومورفية التحليلية التي على الصورة :

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n, \tag{14}$$

والمعرفة على قرص الوحدة المثقوب $\mathbb{U}^*=\mathbb{U}\setminus\{0\}$.

وإذا كانت $g(z)\in\Sigma$, معطاة على الصورة

$$g(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n,$$

فإن حاصل ضرب هادمرد (أو الالتفاف) للدالتين $f(z)$ و $g(z)$ يعرف كالآتي :

$$(f*g)(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n z^n=(g*f)(z).$$

لتكن Σ_p يرمز إلى فصل الدوال الميرومورفية التحليلية التي على الصورة

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\, z^n \ (a_n\geq 0). \tag{15}$$

والمعرفة على قرص الوحدة المثقوب $\mathbb{U}^*$.

لتكن $\Sigma(p)$ ترمز إلى فصل الدوال الميرومورفية التحليلية ومتعددة التكافؤ من الرتبة p على $\mathbb{U}^*$ التي على الصورة

$$f(z)=\frac{1}{z^p}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\, z^{k-p} \ (p\in\mathbb{N}), \tag{16}$$

ونلاحظ أيضا $\Sigma(1)=\Sigma$.

لتكن $\Sigma_p(p)$ هو فصل الدوال الميرومورفية ذات معاملات مفقودة والتي على الصورة

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k \quad (z \in \mathbb{U}^*). \tag{17}$$

باستخدام الدالة فوق الهندسية المعممة ${}_qF_s(\alpha_1,...,\alpha_q,\beta_1,...,\beta_s;z)$ المعرفة بالمعادلة (6) عرفا كلا من Liu and Srivastava [50] (انظر أيضا Aouf [5]) المؤثر $M_{p,q,s}(\alpha_1)$ كالآتي :

ليكن

$$m_p(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s;z) = z^{-p}\ {}_qF_s(\alpha_1,...,\alpha_q,\beta_1,...,\beta_s;z)$$

فإن المؤثر الخطي

$$M_p(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s) : \Sigma_p(p) \to \Sigma_p(p)\ ,$$

يعرف باستخدام حاصل ضرب هادمرد (أو الالتفاف) على الصورة:

$$M_p(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s)\, f(z) = m_p(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s;z) * f(z).$$

ومنها نستنتج أن

$$M_{p,q,s}(\alpha_1) = M_p(\alpha_1,...,\alpha_q;\beta_1,...,\beta_s) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} \sigma_{k+p}(\alpha_1)\ a_k\ z^k$$
$$(q \le s+1; q, s \in \mathrm{N}_0; z \in \mathbb{U}),$$

حيث إنَ

$$\sigma_{k+p}(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1)_{k+p} ... (\alpha_q)_{k+p}}{(k+p)!(\beta_1)_{k+p} ... (\beta_s)_{k+p}} \quad (k \in \mathrm{N}).$$

تتكون هذه الرسالة من خمسة أبواب رئيسة:

الباب الأول :

هو مدخل الرسالة ويتكون من ستة فصول .

الفصل الأول: يتضمن بعض المفاهيم الأساسية للدوال أحاديةالتكافؤ.

الفصل الثاني : يحتوي على بعض التعاريف للدوال المحدبة بانتظام والنجمية بانتظام.

الفصل الثالث : يحتوي على بعض المؤثرات الخطيةالمرتبطةبالدوال التحليلية.

الفصل الرابع : يتضمن بعض المفاهيم الأساسية للدوال متعددة التكافؤ.

الفصل الخامس : يحتوي على بعض المفاهيم الأساسية للدوال الميرومورفية للدوال أحادية التكافؤ وأيضا يحتوي على تعريف الفصول $\Sigma(\alpha,\lambda)$ و $\Sigma_p(\alpha,\lambda)$ والمعرفين كالآتي:

تعريف 9 [45]:

بفرض $0 \le \alpha < 1$ و $0 \le \lambda < 1,$ فإن الفصل $\Sigma(\alpha,\lambda)$ عبارة عن فصل جزئي من Σ يحتوي على الدوال التي تحقق الشرط الآتي :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{(\lambda-1)f(z)+\lambda zf'(z)}\right)>\alpha \quad (z\in\mathbb{U}^*). \tag{18}$$

وأيضا نقول إن الدالة $f \in \Sigma_p(\alpha,\lambda),$ عندما $f(z)$ تأخذ الشكل (15) وتحقق الشرط (18).

الفصل السادس : يحتوي على بعض المفاهيم الأساسية للدوال الميرومورفية للدوال متعددة التكافؤ.

الباب الثاني:

يتكون هذا الباب من سبعة فصول .

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له و يحتوي على تعريف الفصول $\mathbf{S}_n(p,q,\alpha)$ و $\mathbf{C}_n(p,q,\alpha)$ والمعرفة كالآتي:

$$\mathbf{S}_n(p,q,\alpha)=\left\{f\in\mathbf{T}(p,n):\ \operatorname{Re}\left(\frac{z\ f^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)}\right)\ >\alpha\ \ (z\in\mathbb{U})\right\},$$

و

$$\mathbf{C}_n(p,q,\alpha)=\left\{f\in\mathbf{T}(p,n):\ \operatorname{Re}\left(1+\frac{z\ f^{(2+q)}(z)}{f^{(1+q)}(z)}\right)\ >\alpha\ \ (z\in\mathbb{U})\right\},$$

حيث لأي دالة $f\in\mathbf{T}(p,n),$

$$f^{(q)}(z)=\delta(p,q)z^{p-q}-\sum_{k=n+p}^{\infty}\delta(k,q)a_k z^{k-q},$$

$$\delta(i,j)=\frac{i!}{(i-j)!}=\begin{cases}1 & (j=0)\\ i(i-1)\ldots(i-j+1) & (j\neq 0)\end{cases}.$$

الفصل الثانى : يحتوي على نظرية المعاملات للفصلين $\mathbf{S}_n(p,q,\alpha)$ و $\mathbf{C}_n(p,q,\alpha)$ ويحتوي أيضا على تعريف الفصل $\mathbf{TC}_m(p,q,n,\alpha)(m\in\mathbb{N}_0)$. والمعرف كالآتي:

تعريف 10:

الدالة المعرفة بواسطة المعادلة (13) وتنتمي إلى الفصل $\mathbf{T}(p,n)$ يقال إنها تنتمى إلى الفصل $\mathbf{TC}_m(p,q,n,\alpha)$ إذا حققت الشرط الآتي :

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left(\frac{k-q}{p-q}\right)^m(k-q-\alpha)\delta(k,q)a_k\leq(p-q-\alpha)\delta(p,q).$$

الفصل الثالث : أوجدنا أحسن تقدير لنظريات التشوه لدوال هذا الفصل.

الفصل الرابع : ناقشنا نظرية الانغلاق لدوال هذا الفصل .

الفصل الخامس : ناقشنا النقط القصوى لدوال هذا الفصل .

الفصل السادس : أوجدنا حاصل ضرب هادمرد (أو الالتفاف) لدوال هذا الفصل.

الفصل السابع : حصلنا على أنصاف أقطار الدوائر التي تكون فيها دوال هذا الفصل قريبة من التحدب و نجمية ومحدبة.

الباب الثالث :

يتكون هذا الباب من فصلين :

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له ويحتوي أيضا على تعريف الفصول $\mathbf{ST}(\alpha,\beta)$ و $\mathbf{CT}(\alpha,\beta)$ و $\mathbf{U}L(\alpha,\beta;\lambda)$ ويحتوي أيضا على تعريف متباينة هولدر كالآتي :

بفرض $\mathbf{T}(n)$ هو فصل الدوال التحليلية المعرف على قرص الوحدة المفتوح $\mathbb{U}$ والتي على الصورة الآتية

$$f(z)=z-\sum_{k=n}^{\infty}a_k z^k\quad(a_k\geq 0;n\in\mathrm{N}\setminus\{1\}=\{2,3,.....\}).\tag{19}$$

فإن الفصول $\mathbf{ST}(\alpha,\beta)$ و $\mathbf{CT}(\alpha,\beta)$ تعرف كالآتي:

$$\mathbf{ST}(\alpha,\beta)=\left\{ \begin{array}{c} f\in \mathbf{T}(n)\ :\ \mathrm{Re}\left\{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right\}>\beta\left|\dfrac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| \\ (0\le\alpha<1;\beta\ge 0;z\in\mathbb{U}) \end{array} \right\},$$

و

$$\mathbf{CT}_n(\alpha,\beta)=\left\{ \begin{array}{c} f\in \mathbf{T}(n)\ :\ \mathrm{Re}\left\{1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}-\alpha\right\}>\beta\left|\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \\ (0\le\alpha<1;\beta\ge 0;z\in\mathbb{U}) \end{array} \right\}.$$

تعريف 11 [16] :

بفرض $0\le\alpha<1$ و $\beta\ge 0$ و $0\le\lambda\le 1$ فإن الدالة $f\in\mathbf{T}(n)$ تكون موجودة فى الفصل $\mathbf{U}L(\alpha,\beta;\lambda)$ إذا حققت الشرط الآتي :

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)}-\alpha\right]\ge\beta\left|\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)}-1\right|.$$

تعريف 12 [17]:

بفرض $p_i\ \ge 1$ و $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}=1,$ متباينة هولدر تعرف كالآتي :

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{i,j}\right)\le\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=2}^{\infty}a_{i,j}^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

الفصل الثانى: حصلنا على نتائج رئيسة لدوال هذه الفصول .

الباب الرابع :

يتكون هذا الباب من فصلين.

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له ويحتوي أيضا على تعريف الفصول $\mathbf{R}_{\beta}^{\alpha+1}(\delta)$ و $\mathbf{T}^{\alpha+1}(\delta)$. كالآتي:

تعريف 13:

يقال إن الدالة $f(z)\in\mathbf{A}$ تنتمي للفصل $\mathbf{R}_{\beta}^{\alpha+1}(\delta)$ إذا حققت الشرط الآتي :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Q_{\beta}^{\alpha} f(z)}{Q_{\beta}^{\alpha+1} f(z)}\right)>\frac{\alpha+\beta+\delta}{\alpha+\beta+1} \quad (\alpha>0; \beta>-1; 0\leq\delta<1; z\in\mathbb{U}).$$

تعريف14:

يقال إن الدالة $f(z)\in$ **A** تنتمي للفصل $\mathbf{T}^{\alpha+1}(\delta).$ إذا حققت الشرط الآتي :

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{I^{\alpha} f(z)}{I^{\alpha+1} f(z)}\right\}>\frac{\delta+1}{2} \quad (z\in\mathbb{U};\ 0\leq\delta<1).$$

الفصل الثاني : أوجدنا بعض علاقات الاحتواء للفصول $\mathbf{R}_{\beta}^{\alpha+1}(\delta)$ و $\mathbf{T}^{\alpha+1}(\delta).$

الباب الخامس :

يتكون هذا الباب من خمسة فصول .

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له ويحتوي أيضا على تعريف الفصول $\Sigma_{p,q,s}^{*}(\alpha_1;A,B,\lambda)$ و $\Sigma_{p,q,s,c}^{*}(\alpha_1;A,B,\lambda)$ كالآتي :

تعريف 15 [8] :

يقال إن الدالة $f(z)\in\ \Sigma_p(p)$ إنها تنتمى للفصل $\Sigma_{p,q,s}(\alpha_1;A,B,\lambda)$ إذا وفقط إذا كان

$$\left|\frac{\dfrac{z\left(M_{p,q,s}(\alpha_1)\, f(z)\right)'}{M_{p,q,s}(\alpha_1)\, f(z)}+p}{B\dfrac{z\left(M_{p,q,s}(\alpha_1)\, f(z)\right)'}{M_{p,q,s}(\alpha_1)\, f(z)}+[pB+(A-B)(p-\lambda)]}\right|<1 \qquad (20)$$

$$(-1\leq B<A\leq 1; 0\leq\lambda<p; p\in \mathrm{N}; z\in\mathbb{U}).$$

بفرض أن $\Sigma_p^{*}(p)$ فصل جزئي من الفصل $\Sigma_p(p)$ ويتكون من الدوال التي على الصورة :

$$f(z)\ =\frac{1}{z^{p}}\ +\sum_{k=p}^{\infty}|a_k|\ z^{k} \quad (p\in \mathrm{N}),$$

بفرض أن $\Sigma_{p,q,s}^{*}(\alpha_1;A,B,\lambda)$ هو الفصل الجزئي من الفصل $\Sigma_{p,q,s}(\alpha_1;A,B,\lambda)$ويحقق

$$\Sigma_{p,q,s}^{*}(\alpha_1;A,B,\lambda)=\Sigma_{p,q,s}(\alpha_1;A,B,\lambda)\cap\Sigma_p^{*}(p)$$

الفصلين $\Sigma_{p,q,s}(\alpha_1;A,B,\lambda)$ و $\Sigma_{p,q,s}^{*}(\alpha_1;A,B,\lambda)$ عرفهما Aouf [8].

تعريف 16 :

بفرض أن الفصل $\Sigma^{*}_{p,q,s,c}(\alpha_1; A, B, \lambda)$ هو فصل جزئي من الفصل $\Sigma^{*}_{p,q,s}(\alpha_1; A, B, \lambda)$ ويتكون من الدوال التي على الصورة :

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \frac{(A-B)(p-\lambda)c}{[2p(1-B)-(A-B)(p-\lambda)]\Gamma_{2p}(\alpha_1)} z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| \; z^k \; (0 < c < 1).$$

الفصل الثانى : يحتوي على خصائص لدوال الفصل $\Sigma^{*}_{p,q,s,c}(\alpha_1; A, B, \lambda)$ **.**

الفصل الثالث : ناقشنا نظريات الانغلاق لدوال الفصل $\Sigma^{*}_{p,q,s,c}(\alpha_1; A, B, \lambda)$.

الفصل الرابع : حصلنا على أنصاف أقطار الدوائر التي تكون فيها الدالة محدبة لدوال الفصل $\Sigma^{*}_{p,q,s,c}(\alpha_1; A, B, \lambda)$.

الفصل الخامس : قمنا بدراسة المجاميع الجزئية لدوال الفصل $\Sigma_p(\alpha, \lambda)$ التي على الصورة

$f_k(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{k} a_n \; z^n,$ وقمنا بحساب الحدود الدنيا للنسب التالية

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f_k'(z)}{f'(z)}\right\} \text{ و } \operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{f_k'(z)}\right\} \text{ و } \operatorname{Re}\left\{\frac{f_k(z)}{f(z)}\right\} \text{ و } \operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)}{f_k(z)}\right\}$$