



جامعة الفيوم

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسات على بعض فصول الدوال التحليلية المرتبطة بمؤثرات معينة

رسالة مقدمة من الدراسة

غادة محمد عبد الستار السيد

قسم الرياضيات-كلية العلوم-جامعة الفيوم

لاستيفاء متطلبات الحصول على درجة الماجستير
(الرياضيات البحتة- تحليل مركب)

جامعة الفيوم

٢٠١٥

الملخص العربي

الهدف من هذه الرسالة تعريف ودراسة خصائص فصول جديدة من الدوال التحليلية (أحادية ومتعددة التكافؤ) المعرفة في قرص الوحدة المفتوح $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ حيث U في المستوى المركب \mathbb{C} وهذه الفصول معرفة باستخدام بعض المؤثرات الخطية والتكاملية و حاصل ضرب هادمر (أو الالتفاف) ومشتقات من الرتب العليا .
ليكن \mathbf{A} يرمز إلى فصل الدوال التحليلية والتي على الصورة

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \quad (1)$$

والمعرفة على U و S يرمز إلى الفصل الجزئي من \mathbf{A} والمكون من الدوال التحليلية أحادية التكافؤ في U وكذلك يرمز T للفئة الجزئية من S والتي تتكون من الدوال ذات المعاملات

$$f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geq 0).$$

لتكن الدالتان $f(z)$ و $g(z)$ تنتميان للفصل \mathbf{A} حيث $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$

فإن حاصل ضرب هادمر (أو الالتفاف) للدالتين $f(z)$ و $g(z)$ يعرف كالآتي:

$$(f * g)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k = (g * f)(z).$$

تعريف 1 [70] . يقال للدالة $f(z) \in S$ إنها تنتمي لفصل الدوال النجمية من الرتبة α ($0 \leq \alpha < 1$) ونرمز له بالرمز $S^*(\alpha)$ ، إذا كانت تحقق الشرط التالي:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha.$$

تعريف 2 [70] . يقال للدالة $f(z) \in S$ إنها تنتمي لفصل الدوال المحدبة من الرتبة α ($0 \leq \alpha < 1$) ونرمز له بالرمز $K(\alpha)$ ، إذا كانت تحقق الشرط التالي:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha,$$

ودرس الفصلين $S^*(\alpha)$ و $K(\alpha)$ كل "من

([68] Pinchuk and [38] Jack, [53] MacGregor, [74] Schild وأخرون)

ويرتبط الفصلان $S^*(\alpha)$ و $K(\alpha)$ بالعلاقة

$$f(z) \in K(\alpha) \Leftrightarrow zf'(z) \in S^*(\alpha).$$

تعريف 3 [34]. يقال للدالة $f(z) \in S$ إنها تنتمي لفصل الدوال القريبة من التحذب من الرتبة $(0 \leq \alpha < 1)$ ويرمز لها بالرمز $C_g(\alpha)$ إذا وجدت دالة $g(z) \in S^*$ ويتحقق

$$\Re \left\{ \frac{zf'(z)}{g(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in U.$$

وهذا الفصل درس بواسطة (Goodman [34])

ونلاحظ أن

$$K(0) \subseteq S^*(0) \subseteq C_g(0) \equiv C_g \subseteq S,$$

حيث C_g هو فصل كل الدوال القريبة من التحذب ودرس هذا الفصل [44] Kaplan

نرمز بالرموز $T^*(\alpha)$ و $C(\alpha)$ للفصول الجزئية من $S^*(\alpha)$ و $K(\alpha)$ والتي تحقق

$$T^*(\alpha) = S^*(\alpha) \cap T \text{ and } C(\alpha) = K(\alpha) \cap T.$$

الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تسمى محدبة (نجمية) بانتظام على قرص الوحدة U إذا كانت محدبة (نجمية) وتحقق أن القوس $f(\gamma)$ يكون محدباً ("نجمياً") بالنسبة $f(\xi)$ لكل قوس دائري γ له المركز ξ محتوي أيضا في U . ويرمز لفصل الدوال المحدبة بانتظام وفصل الدوال النجمية بانتظام , على التوالي بالرموز UCV و UST وهذه الفصول عرفها [35] Goodman.

تعريف 4 ([35],[52],[71]):

يقال إن الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي إلى فصل الدوال المحدبة بانتظام UCV إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \quad (z \in U).$$

وأيضاً نقول إن الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي إلى فصل الدوال النجمية بانتظام UST إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} \geq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \quad (z \in U).$$

ودرس الفصل UCV كل من [Goodman [35] and Ma and Minda [52]] وأيضا درس الفصل UST كل من [Goodman [36] and Ronning [72]]

ويرتبط الفصلين UST و UCV بالعلاقة

$$f(z) \in UCV \Leftrightarrow zf'(z) \in UST. \quad (2)$$

وفى [72] عمم Ronning الفصلين UCV و UST بإدخال البارامتر α ($-1 \leq \alpha \leq 1$) كالاتي:

تعريف 5 [72] :

يقال إن الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي إلى فصل الدوال النجمية بانتظام من الرتبة α ($-1 \leq \alpha \leq 1$) $UST(\alpha)$ إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha \right\} \geq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \quad (-1 \leq \alpha < 1; z \in U). \quad (3)$$

باستبدال $f(z)$ فى المعادلة (3) بواسطة $zf'(z)$ نحصل على المعادلة الآتية

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \alpha \right\} \geq \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \quad (-1 \leq \alpha < 1; z \in U),$$

وهذا فصل الدوال المحدبة بانتظام من الرتبة α ($-1 \leq \alpha \leq 1$) ويرمز له بالرمز $UCV(\alpha)$.

$$f(z) \in UCV(\alpha) \Leftrightarrow zf'(z) \in UST(\alpha).$$

[44] and [43] Kanas and Wisniowska عرفا فصول الدوال المحدبة بانتظام من النوع

β ويرمز له $\beta - UCV$ ($0 \leq \beta < \infty$), وكذلك فصول الدوال النجمية بانتظام من النوع β ويرمز له $\beta - UST$, ($0 \leq \beta < \infty$) كالتالي:

تعريف 6 ([42],[43]) :

يقال إن الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي إلى فصل الدوال المحدبة بانتظام من النوع β ويرمز له بالرمز $\beta-UCV$ إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq \beta \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \quad (\beta \geq 0; z \in \mathbf{U}).$$

من (2) نجد أن فصل الدوال النجمية بانتظام من النوع β ($\beta-UST$) يرتبط بفصل الدوال المحدبة بانتظام من النوع β ($\beta-UCV$) بالعلاقة $f(z) \in \beta-UCV \Leftrightarrow zf'(z) \in \beta-UST$ ولذلك الفصل $\beta-UST$ هو فصل جزئي من \mathbf{A} ويحقق الشرط الآتي

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} \geq \beta \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \quad (\beta \geq 0; z \in \mathbf{U}).$$

تعريف 7 ([76],[62],[10]):

يقال إن الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي إلى فصل الدوال النجمية بانتظام من الرتبة α والنوع β $UST(\alpha, \beta)$ ($-1 \leq \alpha < 1, \beta \geq 0$)، إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha \right\} \geq \beta \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \quad (-1 \leq \alpha < 1; \beta \geq 0; z \in \mathbf{U}). \quad (4)$$

تعريف 8 ([62],[10]):

يقال إن الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي إلى فصل الدوال المحدبة بانتظام من الرتبة α والنوع β إذا وفقط إذا كان :

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \alpha \right\} \geq \beta \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \quad (-1 \leq \alpha < 1; \beta \geq 0; z \in \mathbf{U}). \quad (5)$$

من (4) و (5) نستنتج أن

$$f(z) \in UCV(\alpha, \beta) \Leftrightarrow zf'(z) \in UST(\alpha, \beta).$$

وأيضاً نلاحظ أن:

$$(i) \quad UST(0,1) = UST \text{ and } UST(\alpha,1) = UST(\alpha),$$

$$(ii) \quad UCV(0,1) = UCV \text{ and } UCV(\alpha,1) = UCV(\alpha).$$

بفرض أن $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ و β_1, \dots, β_s ($\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-, \mathbb{Z}_0^- = 0, -1, -2, \dots; j = 1, 2, \dots, s$) بارامترات مركبة أو حقيقية فإن الدالة فوق هندسية المعممة ${}_qF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z)$ تعرف كالاتي:

$${}_qF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_q)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_s)_k} \frac{1}{k!} z^k, \quad (6)$$

$$(q \leq s+1; s, q \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}; z \in \mathbb{U}),$$

حيث

$$(\theta)_k = \frac{\Gamma(\theta+k)}{\Gamma(\theta)} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ \theta(\theta+1)\dots(\theta+k-1) & (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

باستخدام الدالة

$$h(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z) = z {}_qF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z),$$

$H_{q,s}(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s) : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, عرفا المؤثر الخطي Dziok and Srivastava [29] باستخدام حاصل ضرب هادمر (أو الالتفاف) كالاتي:

$$\begin{aligned} H_{q,s}(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s) f(z) &= h(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z) * f(z) \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \Gamma_k(\alpha_1) a_k z^k \quad (z \in \mathbb{U}), \end{aligned}$$

حيث

$$\Gamma_k(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1)_{k-1} \dots (\alpha_q)_{k-1}}{(\beta_1)_{k-1} \dots (\beta_s)_{k-1}} \frac{1}{(k-1)!}.$$

ونختصر هذا المؤثر على الصورة الآتية:

$$H_{q,s}(\alpha_1) f(z) = H_{q,s}(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z) f(z).$$

وهذا المؤثر الخطي يتضمن مؤثرات خطية مختلفة والتي درسها العديد من المؤلفين السابقين انظر (Carlson and Shaffer [21], Hohlov [37], Ruscheweyh [73]).

Owa and Srivastava [66], Choi et al. [28], Noor [58], Cho et al. [24] and Bernardi [18] وآخرون).

(Jung et al. [40]) عرفوا مؤثرات تكاملية كالاتي:

$$Q_{\beta}^{\alpha} f(z) = \begin{cases} \binom{\alpha+\beta}{\beta} \frac{\alpha}{z^{\beta}} \int_0^z \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{\alpha-1} t^{\beta-1} f(t) dt & (\alpha > 0; \beta > -1) \\ f(z) & (\alpha = 0; \beta > -1) \end{cases} \quad (7)$$

و

$$I^{\alpha} f(z) = \begin{cases} \frac{2^{\alpha}}{z^{\Gamma(\alpha)}} \int_0^z \left(\log \frac{z}{t}\right)^{\alpha-1} f(t) dt & (\alpha > 0) \\ f(z) & (\alpha = 0) \end{cases} \quad (8)$$

لأي دالة $f(z) \in \mathbf{A}$ نستنتج أن

$$Q_{\beta}^{\alpha} f(z) = z + \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + k)}{\Gamma(\alpha + \beta + k)} a_k z^k \quad (\alpha \geq 0; \beta > -1) \quad (9)$$

و

$$I^{\alpha} f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\alpha} a_k z^k \quad (\alpha \geq 0). \quad (10)$$

باستخدام (9) و(10) من السهل أن نتحقق من المعادلتين التكراريتين الآتيتين:

$$z(Q_{\beta}^{\alpha+1} f(z))' = (\alpha + \beta + 1)Q_{\beta}^{\alpha} f(z) - (\alpha + \beta)Q_{\beta}^{\alpha+1} f(z) \quad (\alpha > 0; \beta > -1),$$

$$z(I^{\alpha+1} f(z))' = 2I^{\alpha} f(z) - I^{\alpha+1} f(z) \quad (\alpha > 0).$$

بوضع $\beta = \nu > -1, \alpha = 1$ في المعادلة (7) نلاحظ أن

$$\begin{aligned} Q_{\nu}^1 f(z) &= J_{\nu} f(z) = \frac{\nu+1}{z^{\nu}} \int_0^z t^{\nu-1} f(t) dt \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu+1}{\nu+k} a_k z^k \quad (\nu > -1; z \in U), \end{aligned}$$

حيث J_{ν} هو مؤثر ليبيرا التكاملي (انظر ، [28]، [32] و [65]).

لتكن $S(p)$ هي فصل الدوال التحليلية ومتعددة التكافؤ والتي على الصورة

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \quad (p \in \mathbb{N}), \quad (11)$$

و $S(p, n)$ هي فصل الدوال التحليلية ومتعددة التكافؤ والتي على الصورة

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k \quad (p \in \mathbb{N}),$$

نلاحظ أن $S(1, 1) = S$ و $S(p, 1) = S(p)$.

لتكن $T(p)$ هي فصل الدوال التحليلية ومتعددة التكافؤ والتي على الصورة

$$f(z) = z^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geq 0; p \in \mathbb{N}), \quad (12)$$

ونلاحظ أن $T(1) = T$.

و $T(p, n)$ هي فصل الدوال التحليلية ومتعددة التكافؤ والتي على الصورة

$$f(z) = z^p - \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geq 0; p \in \mathbb{N}), \quad (13)$$

وأيضا نلاحظ أن $T(p, 1) = T(p)$.

لتكن Σ ترمز إلى فصل الدوال الميرومورفية التحليلية التي على الصورة :

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad (14)$$

والمعرفة على قرص الوحدة المثقوب $U^* = U \setminus \{0\}$.

وإذا كانت $g(z) \in \Sigma$, معطاة على الصورة

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n,$$

فإن حاصل ضرب هادمر (أو الالتفاف) للدالتين $f(z)$ و $g(z)$ يعرف كالاتي :

$$(f * g)(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n = (g * f)(z).$$

لتكن Σ_p يرمز إلى فصل الدوال الميرومورفية التحليلية التي على الصورة

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \geq 0). \quad (15)$$

والمعرفة على قرص الوحدة المثقوب U^* .

لتكن $\Sigma(p)$ ترمز إلى فصل الدوال الميرومورفية التحليلية ذات التكافؤ p على U^* التي على الصورة

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-p} \quad (p \in \mathbf{N}), \quad (16)$$

ونلاحظ أيضا $\Sigma(1) = \Sigma$.

لتكن $\Sigma_p(p)$ هو فصل الدوال الميرومورفية ذات معاملات مفقودة والتي على الصورة

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k \quad (z \in U^*). \quad (17)$$

باستخدام الدالة فوق الهندسية المعممة ${}_qF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z)$ المعرفة في (6) عرفنا Liu and Srivastava [50] (انظر أيضا Aouf [5]) المؤثر $M_{p,q,s}(\alpha_1)$ كالآتي :

ليكن

$$m_p(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z) = z^{-p} {}_qF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z)$$

فإن المؤثر الخطي

$$M_p(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s) : \Sigma_p(p) \rightarrow \Sigma_p(p),$$

يعرف باستخدام حاصل ضرب هادمر (أو الالتفاف) على الصورة:

$$M_p(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s) f(z) = m_p(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z) * f(z).$$

ومنها نستنتج أن

$$M_{p,q,s}(\alpha_1) = M_p(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s) = z^{-p} + \sum_{k=p}^{\infty} \sigma_{k+p}(\alpha_1) a_k z^k$$

$$(q \leq s+1; q, s \in \mathbf{N}_0; z \in U),$$

حيث إن

$$\sigma_{k+p}(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1)_{k+p} \cdots (\alpha_q)_{k+p}}{(k+p)! (\beta_1)_{k+p} \cdots (\beta_s)_{k+p}} \quad (k \in \mathbf{N}).$$

تتكون هذه الرسالة من خمسة أبواب رئيسية:

الباب الأول:

هو مدخل الرسالة ويتكون من ستة فصول .

الفصل الأول: يتضمن بعض المفاهيم الأساسية للدوال أحادية التكافؤ.

الفصل الثاني: يحتوي على بعض التعاريف للدوال المحدبة بانتظام والنجمية بانتظام.

الفصل الثالث: يحتوي على بعض المؤثرات الخطية المرتبطة بالدوال التحليلية.

الفصل الرابع: يتضمن بعض المفاهيم الأساسية للدوال متعددة التكافؤ.

الفصل الخامس: يحتوي على بعض المفاهيم الأساسية للدوال الميرومورفية للدوال أحادية التكافؤ وأيضا يحتوي على تعريف الفصول $\Sigma(\alpha, \lambda)$ و $\Sigma_p(\alpha, \lambda)$ والمعرفين كالاتي:

تعريف 9 [45]:

بفرض $0 \leq \alpha < 1$ و $0 \leq \lambda < 1$ فإن الفصل $\Sigma(\alpha, \lambda)$ عبارة عن فصل جزئي من Σ يحتوي على الدوال التي تحقق الشرط الآتي :

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{(\lambda-1)f(z) + \lambda zf'(z)} \right) > \alpha \quad (z \in U^*) \quad (18)$$

وأیضا نقول إن الدالة $f \in \Sigma_p(\alpha, \lambda)$ عندما $f(z)$ تأخذ الشكل (15) وتحقق الشرط (18).

الفصل السادس: يحتوي على بعض المفاهيم الأساسية للدوال الميرومورفية للدوال متعددة التكافؤ.

الباب الثاني:

يتكون هذا الباب من سبعة فصول .

الفصل الأول: يحتوي على مقدمة له ويحتوي على تعريف الفصول $s_n(p, q, \alpha)$ و

$c_n(p, q, \alpha)$ والمعرفة كالاتي:

$$s_n(p, q, \alpha) = \left\{ f \in \mathbf{T}(p, n) : \operatorname{Re} \left(\frac{z f^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)} \right) > \alpha \quad (z \in U) \right\},$$

و

$$C_n(p, q, \alpha) = \left\{ f \in \mathbf{T}(p, n) : \operatorname{Re} \left(1 + \frac{z f^{(2+q)}(z)}{f^{(1+q)}(z)} \right) > \alpha \quad (z \in U) \right\},$$

حيث لأي دالة $f \in \mathbf{T}(p, n)$,

$$f^{(q)}(z) = \delta(p, q) z^{p-q} - \sum_{k=n+p}^{\infty} \delta(k, q) a_k z^{k-q},$$

$$\delta(i, j) = \frac{i!}{(i-j)!} = \begin{cases} 1 & (j=0) \\ i(i-1)\dots(i-j+1) & (j \neq 0) \end{cases}$$

الفصل الثاني : يحتوي على نظرية المعاملات للفصلين $C_n(p, q, \alpha)$ و $S_n(p, q, \alpha)$ ويحتوي أيضا على تعريف الفصل $TC_m(p, q, n, \alpha)$ ($m \in N_0$) والمعرف كالاتي:

تعريف 10:

الدالة المعرفة بواسطة المعادلة (13) وتنتمي إلى الفصل $\mathbf{T}(p, n)$ يقال إنها تنتمي إلى الفصل $TC_m(p, q, n, \alpha)$ إذا حققت الشرط الآتي :

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^m (k-q-\alpha) \delta(k, q) a_k \leq (p-q-\alpha) \delta(p, q).$$

الفصل الثالث : أوجدنا أحسن تقدير لنظريات التشوه لدوال هذا الفصل .

الفصل الرابع : ناقشنا نظرية الانغلاق لدوال هذا الفصل .

الفصل الخامس : ناقشنا النقط القصوى لدوال هذا الفصل .

الفصل السادس : أوجدنا حاصل ضرب هادمر (أو الالتفاف) لدوال هذا الفصل.

الفصل السابع : حصلنا على أنصاف أقطار الدوائر التي تكون فيها دوال هذا الفصل قريبة من التحذب و نجمية ومحدبة.

الباب الثالث :

يتكون هذا الباب من فصلين :

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له ويحتوي أيضا على تعريف الفصول $ST(\alpha, \beta)$ و $CT(\alpha, \beta)$ و $UL(\alpha, \beta; \lambda)$ ويحتوي أيضا على تعريف متباينة هولدر كالاتي :

بفرض $\mathbf{T}(n)$ هو فصل الدوال التحليلية المعرف على قرص الوحدة المفتوح U والتي على الصورة الآتية

$$f(z) = z - \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geq 0; n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, \dots\}). \quad (19)$$

فإن الفصول $\mathbf{ST}(\alpha, \beta)$ و $\mathbf{CT}(\alpha, \beta)$ تعرف كالاتي:

$$\mathbf{ST}(\alpha, \beta) = \left\{ f \in \mathbf{T}(n) : \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha \right\} > \beta \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \right\},$$

$$(0 \leq \alpha < 1; \beta \geq 0; z \in U)$$

و

$$\mathbf{CT}_n(\alpha, \beta) = \left\{ f \in \mathbf{T}(n) : \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \alpha \right\} > \beta \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \right\}.$$

$$(0 \leq \alpha < 1; \beta \geq 0; z \in U)$$

تعريف 11 [16]:

بفرض $0 \leq \alpha < 1$ و $\beta \geq 0$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ فإن الدالة $f \in \mathbf{T}(n)$ تكون موجودة في الفصل $\mathbf{UL}(\alpha, \beta; \lambda)$ إذا حققت الشرط الآتي:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda z f'(z)} - \alpha \right] \geq \beta \left| \frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda z f'(z)} - 1 \right|.$$

تعريف 12 [17]:

بفرض $p_i \geq 1$ و $\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1$, متباينة هولدر تعرف كالاتي:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^m a_{i,j} \right) \leq \prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=2}^{\infty} a_{i,j}^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

الفصل الثاني: حصلنا على نتائج رئيسة لدوال هذه الفصول.

الباب الرابع:

يتكون هذا الباب من فصلين.

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له ويحتوي أيضا على تعريف الفصول $\mathbf{R}_\beta^{\alpha+1}(\delta)$ و $\mathbf{T}^{\alpha+1}(\delta)$ كالآتي:

تعريف 13:

يقال إن الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي للفصل $\mathbf{R}_\beta^{\alpha+1}(\delta)$ إذا حققت الشرط الآتي :

$$\operatorname{Re} \left(\frac{Q_\beta^\alpha f(z)}{Q_\beta^{\alpha+1} f(z)} \right) > \frac{\alpha + \beta + \delta}{\alpha + \beta + 1} \quad (\alpha > 0; \beta > -1; 0 \leq \delta < 1; z \in \mathbf{U}).$$

تعريف 14 :

يقال إن الدالة $f(z) \in \mathbf{A}$ تنتمي للفصل $\mathbf{T}^{\alpha+1}(\delta)$ إذا حققت الشرط الآتي :

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{I^\alpha f(z)}{I^{\alpha+1} f(z)} \right\} > \frac{\delta + 1}{2} \quad (z \in \mathbf{U}; 0 \leq \delta < 1).$$

الفصل الثاني : أوجدنا بعض علاقات الاحتواء للفصول $\mathbf{R}_\beta^{\alpha+1}(\delta)$ و $\mathbf{T}^{\alpha+1}(\delta)$.

الباب الخامس :

يتكون هذا الباب من خمسة فصول .

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له ويحتوي أيضا على تعريف الفصول $\Sigma_{p,q,s}^*(\alpha_1; A, B, \lambda)$ و $\Sigma_{p,q,s,c}^*(\alpha_1; A, B, \lambda)$ كالآتي :

تعريف 15 [8] :

يقال إن الدالة $f(z) \in \Sigma_p(p)$ إنها تنتمي للفصل $\Sigma_{p,q,s}(\alpha_1; A, B, \lambda)$ إذا وفقط إذا كان

$$\left| \frac{\frac{z(M_{p,q,s}(\alpha_1)f(z))}{M_{p,q,s}(\alpha_1)f(z)} + p}{B \frac{z(M_{p,q,s}(\alpha_1)f(z))}{M_{p,q,s}(\alpha_1)f(z)} + [pB + (A-B)(p-\lambda)]} \right| < 1 \quad (20)$$

$$(-1 \leq B < A \leq 1; 0 \leq \lambda < p; p \in \mathbf{N}; z \in \mathbf{U}).$$

بفرض أن $\Sigma_p^*(p)$ فصل جزئي من الفصل $\Sigma_p(p)$ ويتكون من الدوال التي على الصورة :

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \sum_{k=p}^{\infty} |a_k| z^k \quad (p \in \mathbb{N}),$$

بفرض أن $\Sigma_{p,q,s}^*(\alpha_1; A, B, \lambda)$ هو الفصل الجزئي من الفصل $\Sigma_{p,q,s}(\alpha_1; A, B, \lambda)$ ويحقق

$$\Sigma_{p,q,s}^*(\alpha_1; A, B, \lambda) = \Sigma_{p,q,s}(\alpha_1; A, B, \lambda) \cap \Sigma_p^*(p)$$

الفصلين $\Sigma_{p,q,s}^*(\alpha_1; A, B, \lambda)$ و $\Sigma_{p,q,s}(\alpha_1; A, B, \lambda)$ عرفهما [8] Aouf.

تعريف 16 :

بفرض أن الفصل $\Sigma_{p,q,s,c}^*(\alpha_1; A, B, \lambda)$ هو فصل جزئي من الفصل $\Sigma_{p,q,s}^*(\alpha_1; A, B, \lambda)$ ويتكون من الدوال التي على الصورة :

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \frac{(A-B)(p-\lambda)c}{[2p(1-B) - (A-B)(p-\lambda)]\Gamma_{2p}(\alpha_1)} z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| z^k \quad (0 < c < 1).$$

الفصل الثاني : يحتوي على خصائص لدوال الفصل $\Sigma_{p,q,s,c}^*(\alpha_1; A, B, \lambda)$.

الفصل الثالث : ناقشنا نظريات الانغلاق لدوال الفصل $\Sigma_{p,q,s,c}^*(\alpha_1; A, B, \lambda)$.

الفصل الرابع : حصلنا على أنصاف أقطار الدوائر التي تكون فيها الدالة محدبة لدوال الفصل $\Sigma_{p,q,s,c}^*(\alpha_1; A, B, \lambda)$.

الفصل الخامس : قمنا بدراسة المجاميع الجزئية لدوال الفصل $\Sigma_p(\alpha, \lambda)$ التي على الصورة

$$f_k(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^k a_n z^n,$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_k(z)}{f'_k(z)} \right\} \quad \text{و} \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_k(z)}{f'_k(z)} \right\} \quad \text{و} \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_k(z)}{f_k(z)} \right\} \quad \text{و} \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_k(z)}{f_k(z)} \right\}$$